Материалы для проведения II (муниципального) этапа XLVI Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области.

1 декабря 2019 года

Долгопрудный 2019

Сборник содержит материалы для проведения II (муниципального) этапа XLVI Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области. Задание подготовили члены региональной Методической комиссии по математике в Московской области к.ф.-м.н. Н.Х. Агаханов и к.ф.-м.н. О.К. Подлипский (Московский физико-технический институт).

Авторы задач – Н.Х. Агаханов и О.К. Подлипский.

Задачи 9.4, 11.5 предложены И.И. Богдановым, 10.5 – П.А. Кожевниковым, 7.4 – О.Н. Агахановой, 10.1 – А.Д. Терешиным.

Рецензенты: к.ф.-м.н. И.И. Богданов, А.Ю. Головко.

Муниципальный этап олимпиады проводится для учащихся **6-11 классов**.

Олимпиада проводится в единые сроки – **1 декабря 2019 года**.

Время выполнения работы: 6 класс – 3 часа, 7-11 класс – 4 часа.

В соответствии с регламентом проведения Всероссийской олимпиады школьников по математике, при проверке работ оценивается:

– правильное решение в 7 баллов;

– решение с недочетами – в 5-6 баллов;

– решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи – в 4 балла;

– доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи – в 2-3 балла;

– рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения – в 1 балл.

Максимальное число баллов – 35.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

Внимание! Приведенные решения не являются единственно правильными. Кроме того, оценка за задачу не должна зависеть от длины решения или его рациональности. В то же время, в 0 баллов оценивается «решение» задачи, при котором используется доказываемое утверждение (наиболее часто это встречается в геометрии: например, нужно доказать, что треугольник равносторонний, а решение начинается со слов «Пусть треугольник ABC – равносторонний…»).

Текст любой длины, не содержащий существенных продвижений, оценивается в 0 баллов. Если задача сведена к более сложной, то ставится 0 баллов.

Решение задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения какой-либо величины включает в себя два шага:

1) доказательство того, что эта величина не больше (не меньше) некоторого числа («оценка»);

2) построение примера, показывающего достижимость этого значения («пример»).

В таких задачах, как правило, первый шаг решения оценивается в 4-5 баллов, второй шаг – в 2-3 балла.

Следует учитывать, что школьники, впервые принимающие участие в олимпиаде, особенно учащиеся 6 и 7 классов, не умеют четко записывать объяснения в своих решениях. Поэтому в 6-7 классах нужно оценивать степень понимания решения, а не качество его записи.

Также не следует снимать баллы за несущественные помарки, описки.

Если в задаче используется теорема из школьной программы, но она явно не названа (например, если написано, какие стороны и углы треугольников равны, но не указан номер признака равенства, или написаны равенства из теоремы Виета, но теорема не названа), то баллы не снимать.

В приведенных после решений задач комментариях указаны баллы за типичные продвижения в решении и ошибки. Баллы за отдельные продвижения суммируются, если это не оговорено отдельно.

Вопросы по организации проведения олимпиады, ее содержанию и оценке работ участников можно задать 1 декабря 2019 г. с 9:30 до 18:30 по телефону +7 (495) 408-7666.

Желаем успешной работы!

Условия, решения, комментарии

6 класс

6.1. В классе 30 учеников. На контрольной по математике некоторые ученики класса получили 5, некоторые – 4, некоторые – 3, некоторые – 2. Сумма полученных оценок оказалась равной 130. А чему равнялась бы сумма полученных оценок, если бы все, получившие 5, получили бы 2, получившие 4 – получили бы 3, получившие 3 – получили бы 4, а получившие 2 – получили бы 5?

Ответ. 80.

Решение. Каждый из учеников класса за две контрольные (состоявшуюся и гипотетическую) получил бы сумму оценок, равную 7. Значит, для всех 30 учеников класса сумма оценок была бы равна 210. И сумма полученных оценок за вторую контрольную равнялась бы 210 – 130 = 80.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 1 балл.
Верный ответ получен на примере – 3 балла.

6.2. В ралли участвовало 6 машин. Они стартовали одновременно. В каждый момент обгона одной машины другой делалась фотография этих двух машин («тройных» обгонов не было, момент старта обгоном не считается). Могло ли оказаться, что первая машина оказалась ровно на 4 фотографиях, вторая – ровно на 5, третья – ровно на 6, четвертая – ровно на 7, пятая – ровно на 8 и шестая – ровно на 9 фотографиях?

Ответ. Не могло.

Решение. Так как на каждой фотографии в момент обгона две машины, то каждая фотография учитывается при подсчете два раза. Значит, суммарное количество появлений машин на фотографиях должно быть равно удвоенному числу фотографий, то есть четному числу. Однако $4+5+6+7+8+9=39$ – нечетно.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

6.3. Пункты A, B, C, D расположены в вершинах прямоугольника $ABCD$, его стороны – дороги. Первая машина проехала за час по маршруту $A \to B \to C \to D$, а вторая проехала за час по маршруту $A \to D \to C \to B$. Через какое время машины встретятся, если они одновременно выедут из пункта A в разных направлениях и поедут по сторонам прямоугольника $ABCD$? (Скорости обеих машин постоянны).

Ответ. Через 40 минут.

Решение. За один час вместе обе машины проехали бы трижды сторону AD и трижды сторону AB, так как одна проезжает за час две стороны, равные AD, и одну, равную AB, а вторая проезжает за час две стороны, равные AB, и одну, равную AD. Значит, за треть часа, то есть за 20 минут вместе машины проедут одну сторону, равную AD, и одну – равную AB. А весь периметр прямоугольника они проедут за вдвое больший промежуток времени.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 1 балл.
Верный ответ получен на примере – 3 балла.

6.4. Когда из семизначного числа A вычли сумму всех, кроме одной, его цифр, получили число 1234515. А какое число получится, если из A вычесть сумму всех его цифр, кроме первой?

Ответ. 1234513.

Решение. Сумма цифр числа A не превосходит 63. Поэтому число A имеет вид $\overline{12345ab}$. Получение числа 1234515 можно описать так: из числа A вычли сумму $S(A)$ всех его цифр, а потом к результату прибавили одну из цифр x исходного числа A.

То есть $\overline{12345ab}-(1+2+3+4+5+a+b)+x=1234515$. Отсюда $\overline{ab}-(15+a+b)+x=15$, $10a+b-(15+a+b)+x=15$, $9a+x=30$. Поэтому не вычитали цифру $x=3$. А если не вычитать 1 (первую цифры числа A) вместо 3, результат получится на 2 меньше, чем при вычитании 3.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 1 балл.
Верный ответ получен на примере – 3 балла.

Замечание. Есть и другие решения, в частности использующее признак делимости на 9. Утверждение о том, что число имеет такой же остаток при делении на 9, как и сумма его цифр, в таком решении можно использовать без доказательства (баллы не снимаются).

6.5. Из 7 внешне одинаковых монет 2 фальшивые монеты – легче настоящих и весят одинаково. Настоящие монеты также весят одинаково. Можно ли найти обе фальшивые монеты за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь?

Ответ. Можно.

Решение 1. Обозначим монеты A, B, C, D, E, F, G. Первым взвешиванием сравним веса монет A, B, C и монет D, E, F. Возможны два случая.

1. Веса равны. Тогда в каждой тройке ровно одна фальшивая монета. За одно взвешивание из трех монет, среди которых ровно одна фальшивая, легко найти фальшивую. Для этого достаточно сравнить веса любых двух монет. Если веса различны, то легкая монета фальшивая, если веса раны, то фальшивой является оставшаяся монета. Значит, вторым и третьим взвешиванием мы находим две фальшивые монеты.

2. Одна из троек, например, A, B, C, весит легче. Тогда среди монет D, E, F нет фальшивых. Значит, обе фальшивых монеты содержатся среди четырех монет A, B, C, G. Сравним веса монет A и B. Если их веса равны, то обе эти монеты либо настоящие (тогда C, G – фальшивые), либо фальшивые (тогда C, G – настоящие). Значит, достаточно сравнить, например, веса монет A и C. И тогда мы найдем пару фальшивых. Если же одна из монет A и B легче другой, то вторым взвешиванием мы нашли одну фальшивую монету. Третьим взвешиванием мы находим фальшивую монету среди C, G.

Решение 2. Обозначим монеты A, B, C, D, E, F, G. Первым взвешиванием сравним веса монет A, B, и монет C, D. Возможны два случая.

1. Веса равны. Тогда в каждой паре либо фальшивых монет нет, либо ровно одна фальшивая. Сравним веса монет A и B. Если они различны, то мы нашли фальшивую монету, и еще за одно взвешивание найдем фальшивую среди C и D. Если же веса монет A и B равны, то обе фальшивые монеты находятся среди E, F, G. Взвесив любые две из них, мы найдем обе фальшивых.

2. Веса различны. Пусть, для определенности, пара монет A, B легче. Тогда обе монеты C, D настоящие, а среди монет A, B либо одна, либо две фальшивые. Сравним веса монет A и B. Если они одинаковы, то мы нашли обе фальшивых монеты. Если же веса различны, то мы нашли фальшивую монету, а еще одна фальшивая находится среди E, F, G. Еще за одно взвешивание (взвесив, например, E и F) мы найдем оставшуюся фальшивую монету.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Приводится схема взвешиваний, которая не работает хотя бы в одном случае – 0 баллов за задачу.

7 класс

7.1. Семь последовательных натуральных чисел как-то расставили по кругу. После этого для каждой пары соседних чисел вычислили разность между ними (из большего числа вычли меньшее). Могли ли пять подряд идущих разностей (из семи) равняться числам 2, 1, 6, 1, 2?

Ответ. Не могли.

Решение. Вычтем из всех данных чисел наименьшее из них. Эта операция не изменит разности между числами. Таким образом, можно считать, что по кругу расставили числа $A = 0$, $B = 1$, $C = 2$, $D = 3$, $E = 4$, $F = 5$, $G = 6$. Разность 6 – максимальная из возможных разностей, и она может быть получена только как разность $G - A$. Стоящие рядом с разностью 6 единицы могут быть получены, только если рядом с A стоит B, а рядом с G стоит F. Для того, чтобы получить разности 2, рядом с F должно стоять число D, и рядом с B также должно стоять число D. А это невозможно.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Идея «вычитания наименьшего числа» отдельно не оценивается. За ее отсутствие баллы не снимаются. За ее наличие баллы не добавляются.

7.2. Пункты A, B, C, D расположены в вершинах прямоугольника $ABCD$, его стороны и диагонали AC и BD – дороги. Первая машина проехала за час по маршруту $B \to C \to A \to D$, а вторая проехала за час по маршруту $D \to B \to C \to A$. Через какое время машины встретятся, если они одновременно выедут из пункта C: первая по маршруту $C \to B \to D$, вторая – по маршруту $C \to A \to D \to B$, а встреча произойдет на дороге BD? (Скорости обеих машин постоянны).

Ответ. Через 40 минут.

Решение. Диагонали прямоугольника имеют одинаковую длину и длиннее любой его стороны. За один час вместе обе машины проехали бы трижды сторону BC и трижды диагональ, так как одна проезжает за час две стороны, равные BC, и одну диагональ, а вторая проезжает за час две диагонали, и одну сторону, равную BC. Значит, за треть часа, то есть за 20 минут вместе машины проедут одну сторону, равную BC, и одну – равную диагонали. А весь описанный маршрут до встречи на BD они проедут за вдвое больший промежуток времени.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 1 балл.
Верный ответ получен на примере – 3 балла.

Замечание. Можно доказать (но в задаче это не требуется), что встреча обязательно произойдет на дороге BD.

7.3. Можно ли так расставить по кругу 100 чисел 1 и 101 число –1 так, чтобы произведение любых трех подряд идущих чисел было положительным?

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что такое возможно. Так как всего чисел $100 + 101 = 201 = 3 \cdot 67$, то разобьем их все на 67 троек подряд идущих чисел. В каждой тройке произведение чисел положительно, поэтому произведение всех чисел также положительно. Но произведение 100 чисел 1 и 101 числа –1 равно –1, то есть отрицательно.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

7.4. Найдите все решения ребуса КОРОВА + КОРОВА = МОЛОКО. Разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым – одинаковые.

Ответ. Два решения (302015 + 302015 = 604030 и 304015 + 304015 = 608030).

Решение. Равенство в разряде сотен могло быть только в двух случаях: 0 + 0 = 0, то есть О = 0, такое могло быть только если не было переносов из десятков в сотни; а также если О = 9 (в случае переноса единицы из десятков в сотни). Но сумма А + А заканчивается на О, поэтому О – четная цифра, значит О = 0 и тогда А = 5.

Далее, ни в К + К, ни в Р + Р, ни в В + В нет перехода через десяток (слагаемые и сумма – шестизначные и нет соответствующих переносов), значит, все эти цифры не больше 4 (и ненулевые: О = 0). При этом К = 3, так как В + В + 1 = К. Отсюда В = 1. Осталось два варианта для цифры Р, и оба подходят.

Комментарий. Доказано, что О = 0 – 2 балла.
Найдены цифры А, В, К – 2 балла.
Найден только один вариант цифры Р – 1 балл.
Верно получен только один из двух ответов без обоснований – 1 балл.
Верно получены оба ответа без обоснований – 3 балла.

7.5. В зале находятся лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый указал на одного из присутствующих и сказал: «Он – лжец». Оказалось, что про каждого из находящихся в зале кто-то такую фразу сказал. Могло ли в зале быть ровно 101 человек?

Ответ. Не могло.

Решение. Предположим, что в зале мог быть ровно 101 человек. Так как каждый указал на одного из присутствующих, а на каждого из присутствующих кто-то указал, то на каждого указал ровно один из присутствующих. Заметим, что рыцарь мог указать только на лжеца, а лжец – только на рыцаря.

Посмотрим теперь на какого-нибудь рыцаря *А*. Он указал на какого-то лжеца. Тот указал на какого-то рыцаря. Продолжая эту «цепочку» мы получим, что рано или поздно какой-то лжец укажет на рыцаря *А*, так как на других людей в цепочке уже кто-то указывает. Поэтому все присутствующие разобьются на замкнутые цепочки (циклы) четной длины (возможно, длины 2). Но 101 – нечетно. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Замечено, что на каждого указал ровно один из присутствующих – 2 балла.

Замечено, что рыцарь мог указать только на лжеца, а лжец – только на рыцаря – 1 балл.

Утверждается, что цепочка получилась одна (а не несколько) – не более 5 баллов за задачу.

8 класс

8.1. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b число $4a^2+4ab+4a+2b+1$ является составным.

Решение. Заметим, что $4a^2+4ab+4a+2b+1=(4a^2+4a+1)+2b+4ab=$ $=(2a+1)^2+2b(2a+1)=(2a+1)(2a+2b+1)$. Так как числа a и b натуральные, то каждая из скобок больше 1. Поэтому число – составное.

Комментарий. Разложение на множители получено, но не проверено, что оба множителя больше 1 – 5 баллов.

Замечание. Другое решение можно получить, заметив, что $4a^2+4ab+4a+2b+1=(2a+b+1)^2-b^2$.

8.2. Пятеро друзей сыграли друг с другом по несколько партий (не обязательно одинаковое количество) в настольный теннис (ничьих не бывает). После игр первый заметил, что у него побед на 4 больше, чем поражений; второй и третий заметили, что у каждого из них поражений на 5 больше, чем побед. Четвертый заметил, что у него побед столько же, сколько поражений, а пятый, что он с каждым из остальных сыграл поровну партий. Мог ли пятый выиграть во всех партиях?

Ответ. Не мог.

Решение. Предположим, что пятый выиграл во всех партиях. В каждой партии один из игроков выигрывает, другой – проигрывает. Поэтому количество побед должно равняться количеству поражений. Из высказываний первых четырех ребят следует, что у них побед на 6 меньше, чем поражений. Значит, количество побед пятого игрока должно равняться 6 (он не проигрывал). Но количество его побед должно делиться на 4, так как, по его утверждению, он одержал равное количество побед над каждым из соперников, а 6 на 4 не делится. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Замечено, что суммарное количество побед равно количеству поражений – 1 балл.

8.3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. На стороне AC взята точка P так, что LA – биссектриса угла BLP. Докажите, что если $BL = CP$, то угол ABC в два раза больше угла BCA.

Решение. Из условия следует, что треугольники APL и ABL равны по второму признаку (см. рис. 1). Тогда $PL = BL$. Но по условию $BL = CP$. Значит, $CP = PL$. Тогда $\angle PLC=\angle PCL$, и внешний угол APL треугольника CPL в два раза больше угла PCL. С другой стороны, $\angle ABC=\angle ABL=\angle APL$. Утверждение доказано.

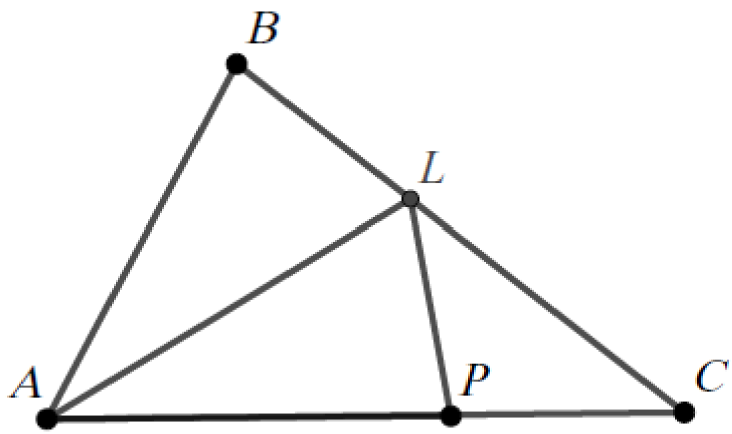

Рис. 1

Комментарий. Доказано равенство треугольников APL и ABL – 2 балла.
Доказано, что $CP = PL$ – 1 балл.

8.4. В турнире по шахматам каждый из 10 игроков сыграл с каждым по одной партии, и Петя занял последнее место (набрал меньше очков, чем любой другой участник). Потом двоих игроков дисквалифицировали, и все очки, набранные во встречах с ними, аннулировали, и этих двух игроков исключили из таблицы. Оказалось, что в результате Петя стал победителем турнира (набрал больше очков, чем любой другой участник). Сколько очков в итоге (после дисквалификации игроков) мог набрать Петя? За победу дается 1 очко, за ничью – 0,5 очка, за поражение – 0 очков.

Ответ. 4 очка.

Решение. В турнире с 10 игроками, проходящем в 1 круг, разыгрывается $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ очков. Поэтому найдется игрок, набравший не более $45 : 10 = 4{,}5$ очков. Значит, игрок, занявший абсолютное последнее место, набрал не более 4 очков. Аналогично, в турнире с $10 - 2 = 8$ игроками, проходящем в 1 круг, разыгрывается $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ очков. В таком турнире найдется игрок, набравший не менее $28 : 8 = 3{,}5$ очков. Значит, игрок, занявший абсолютное первое место (после примененной дисквалификации), набрал не менее 4 очков. Таким образом, Петя мог набрать только 4 очка.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Верный ответ получен рассмотрением примера – 1 балл.
Верно доказана только одна из двух оценок на количество очков у Пети (до или после дисквалификации) – 3 балла.

Замечание. Описанный в условии турнир возможен. Приводить пример турнира не требуется, так как из условия следует, что такой турнир существует. Баллы за отсутствие такого примера не снимаются.

8.5. Даны положительные числа *a*, *b*, *c*, *d*. Известно, что любые два из них отличаются не более чем в 3 раза. Докажите, что $a^2+b^2+c^2+d^2<2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$.

Решение. Так как числа отличаются не более чем в 3 раза, то каждое из них не больше суммы остальных. Более того, если $a\le b\le c\le d$, то $a<b+c+d$, $b<a+c+d$, $c<a+b+d$, $d\le a+b+c$. Умножив первое неравенство на *a*, второе – на *b*, третье – на *c*, четвертое – на *d*, получим: $a^2<ab+ac+ad$, $b^2<ba+bc+bd$, $c^2<ca+cb+cd$, $d^2\le da+db+dc$. Сложив полученные неравенства, получим требуемое.

Комментарий. Замечено, что каждое из чисел не больше суммы остальных трех чисел – 2 балла.

Замечание. Существуют и другие решения.

9 класс

9.1. Найдите отношение $\frac{b^2}{ac}$ если известно, что один из корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ в 4 раза больше другого ($ac \neq 0$).

Ответ. $\frac{25}{4}$.

Решение. Пусть уравнение имеет корни x_1, x_2 ($x_1 = 4x_2$). Тогда из теоремы Виета получаем: $x_1 + x_2 = 5x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = 4x_2^2 = \frac{c}{a}$. Отсюда $x_2 = -\frac{b}{5a}$, и $4x_2^2 = \frac{c}{a} = 4\left(-\frac{b}{5a}\right)^2 = \frac{4b^2}{25a^2}$, то есть $\frac{c}{a} = \frac{4b^2}{25a^2}$. Значит, $c = \frac{4b^2}{25a}$. Поэтому $\frac{b^2}{ac} = \frac{25}{4}$.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Верный ответ получен рассмотрением примера – 1 балл.

9.2. Пусть x, y, z – ненулевые числа. Докажите, что среди неравенств: $x+y>0$, $y+z>0$, $z+x>0$, $x+2y<0$, $y+2z<0$, $z+2x<0$ по крайней мере два – неверные.

Первое решение. Предположим противное. Среди трех ненулевых чисел найдутся два одного знака – пусть это x и y. Тогда одно из неравенств $x+y>0$ и $x+2y<0$ неверно. Если все три числа имеют один знак, то мы таким образом найдем три неверных неравенства. В противном случае среди трех пар (x, y), (y, z), (z, x) найдется пара, в которой первое число отрицательно, а второе положительно; пусть это пара (a, b). Тогда одно из неравенств $a+b>0$ и $a+2b<0$ также неверно, ибо $a+b<a+2b$. Найденные нами неверные неравенства, очевидно, различны.

Второе решение. Предположим, что верно хотя быть пять неравенств. Тогда верны все три неравенства из первых трех и хотя бы два из последних трех, или хотя бы два из первых трех и все три последних неравенства.

В первом случае, не ограничивая общности, считаем, что из последних трех верны четвертое и пятое неравенство. Но тогда $x+2y+y+2z=x+3y+2z<0$. С другой стороны, $x+3y+2z=\left(x+y\right)+2\left(y+z\right)>0$. Противоречие.

Во втором случае, не ограничивая общности, считаем, что $x+y>0$, $y+z>0$. Но тогда, как и в первом случае, $x+2y+y+2z=x+3y+2z<0$ и $x+3y+2z=\left(x+y\right)+2\left(y+z\right)>0$. Противоречие.

Таким образом, из указанных неравенств хотя бы два неверные.

Комментарий. Доказано только, что неверно одно неравенство – 2 балла.
Доказано, что все три числа не могут быть одного знака – 1 балл.
Решение предполагает изначально упорядоченность чисел x, y, z – не более 4 баллов.

Замечание 1. Существуют и другие решения.

Замечание 2. Тройка чисел, для которой верными являются четыре из приведенных неравенств, существует. Например: $x = 9, y = 3, z = -2$. Верными являются первое, второе, третье и пятое неравенства.

9.3. По кольцевой трассе одновременно из одной точки в одном направлении стартовали три велосипедиста. Первый из них проезжает всю трассу за 5 минут, второй – за 7 минут, третий – за 9 минут. Через какое наименьшее время все велосипедисты вновь окажутся в одной точке трассы? Скорости всех велосипедистов постоянны.

Ответ. 157,5 минут.

Решение. Пусть S – длина трассы, тогда скорость первого велосипедиста равна $S/5$, второго – $S/7$, третьего – $S/9$. Поэтому время T до встречи всех велосипедистов определяется равенствами $T\left(\frac{S}{5}-\frac{S}{7}\right)=nS$, $T\left(\frac{S}{7}-\frac{S}{9}\right)=mS$, где n, m – натуральные числа. Отсюда $\frac{n}{m}=\frac{9}{5}$. Наименьшее подходящее n равно 9. Значит, $T\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)=9$. Тогда минимальное время есть $T = 9\cdot\frac{7\cdot 5}{7-5}=157{,}5$ минут.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 2 балла.
Доказано, что одна из встреч произойдет через $157{,}5\cdot 2 = 315$ минут – 0 баллов.

Замечание. Первая встреча велосипедистов произойдет не в стартовой точке.

9.4. В треугольнике ABC, в котором $AB > AC$, проведена биссектриса AL. На стороне AB выбрана точка K так, что $AK=AC$. Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ALB. Докажите, что углы KCB и ABO равны.

Первое решение. Вписанный угол BAL в два раза меньше центрального угла BOL, значит, $\angle BOL = 2\angle BAL = \angle KAC$ (см. рис. 2). Значит, углы KAC и BOL – равные углы при вершинах равнобедренных треугольников KAC и BOL, поэтому $\angle AKC = \angle OBC$. Но угол AKC – внешний для треугольника KBC, поэтому $\angle AKC = \angle ABC + \angle KCB$, в частности $\angle OBC = \angle AKC > \angle ABC$, поэтому точка O лежит по другую сторону от AB, нежели C. С другой стороны, $\angle OBC = \angle ABC + \angle ABO$, откуда и следует утверждение задачи.

Второе решение. Обозначим углы треугольника $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$; по условию, $\beta < \gamma$. Тогда $\angle ALB = \angle ACL + \angle LAC = \alpha + 2\gamma > 90^\circ$, поэтому O лежит по другую сторону от AB, нежели L, и $\angle OBA = \angle OAB = (180^\circ - \angle AOB)/2 = \angle ALB - 90^\circ = (\alpha + 2\gamma) - (\alpha + \beta + \gamma) = \gamma - \beta$. С другой стороны, в равнобедренном треугольнике AKC имеем $\angle ACK = \angle AKC = (180^\circ - \angle KAC)/2 = 90^\circ - \alpha = \beta + \gamma$, откуда $\angle KCB = \angle ACB - \angle ACK = 2\gamma - (\beta + \gamma) = \gamma - \beta = \angle OBA$, что и требовалось.

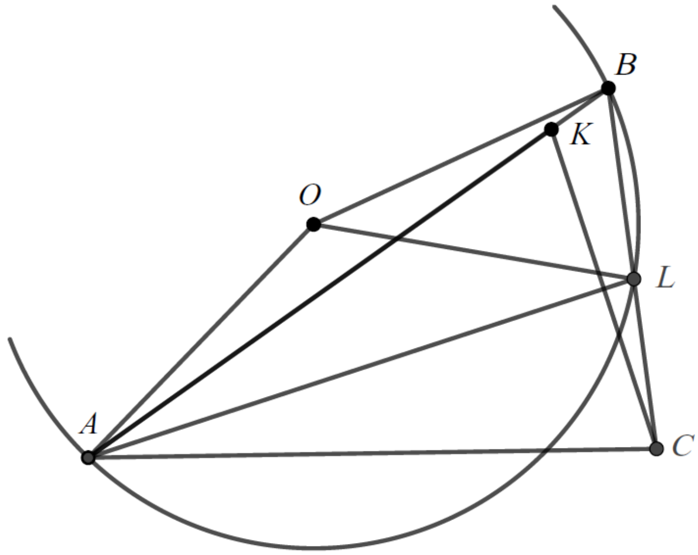

Рис. 2

Комментарий. Доказано, что $\angle BOL = \angle KAC$ – 2 балла.

Замечено, что треугольники KAC и BOL равнобедренные, и доказано, что $\angle AKC = \angle OBC$ – 1 балл.

Используется, но не доказано, что O лежит по другую сторону от AB, нежели C – снять 1 балл.

9.5. Шахматная фигура «кентавр» ходит попеременно как конь и как белая пешка (т.е. строго на одну клетку вверх). Может ли она, начав с некоторой клетки шахматной доски 8×8, обойти все клетки, побывав на каждой клетке ровно по разу, если первый ход она делает как пешка? Стартовая клетка считается обойденной.

Ответ. Не может.

Решение. Рассмотрим шахматную раскраску нашей доски. Заметим, что и пешка, и конь при своем ходе меняют цвет клетки. Пусть кентавр ходом пешки начал обход доски с белой клетки. Тогда он попадет на черную клетку, и следующим ходом (коня) он попадет на белую клетку. Значит, кентавр всегда ходом пешки будет ходить с белой клетки на черную клетку. Однако в нижнем ряду доски есть черные клетки. На них нельзя пойти ходом пешки, так как пешка по правилам ходит только вверх. А конь на эти клетки также попасть не может, поскольку он будет ходить только с черных клеток на белые. Поэтому побывать на всех клетках доски не удастся.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Доказано, что при шахматной раскраске цвет клеток для хода кентавра как коня (и как пешки) фиксированный – 3 балла.

Замечание 1. Доску нельзя обойти и в случае, когда кентавр первым ходом ходит как конь.

Замечание 2. Существуют и другие решения.

10 класс

10.1. Графики функций $f(x)=ax^2+bx$, $g(x)=cx^2+dx$, $f_1(x)=ax+b$, $g_1(x)=cx+d$, пересекаются в одной точке с отрицательной абсциссой. Докажите, что если $ac\neq 0$, то $bc=ad$.

Решение. Найдем абсциссу x_0 точки пересечения $f(x)$ и $f_1(x)$: $ax^2+bx=ax+b \Leftrightarrow (ax+b)(x-1)=0$. То есть либо $x_0=1$, либо $x_0=-\frac{b}{a}$ ($ac\neq 0$). Так как по условию абсцисса точки пересечения отрицательна, $x_0\neq 1$. Значит, $x_0=-\frac{b}{a}$. Аналогично, рассмотрев $g(x)$ и $g_1(x)$, получим, что $x_0=-\frac{d}{c}$. Поэтому $-\frac{b}{a}=-\frac{d}{c}$, откуда получаем $bc=ad$.

Комментарий. Получено и решено уравнение для нахождения абсциссы x_0 точки пересечения – 2 балла.

10.2. В турнире по шахматам каждый из 10 игроков сыграл с каждым по одной партии, и Петя занял последнее место (набрал меньше очков, чем любой другой участник). Потом одного игрока дисквалифицировали, и все очки, набранные во встречах с ним, аннулировали, и этого игрока исключили из таблицы. Мог ли в результате Петя стать победителем турнира (набрать больше очков, чем любой другой участник)?

Ответ. Не мог.

Решение. В турнире с 10 игроками, проходящем в 1 круг, разыгрывается $\frac{10\cdot 9}{2}=45$ очков. Поэтому найдется игрок, набравший не более $45:10=4{,}5$ очков. Значит, Петя, занявший абсолютное последнее место, набрал не более 4 очков. Аналогично, в турнире с $10-1=9$ игроками, проходящем в 1 круг, разыгрывается $\frac{9\cdot 8}{2}=36$ очков. Остальные 8 игроков набрали не менее 32 очков. Значит, найдется игрок (отличный от Пети), набравший (после пересчета) не менее $32:8=4$ очков. Поэтому Петя не мог стать абсолютным победителем турнира.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Верно доказана только одна из двух оценок на количество очков у Пети – 3 балла.

10.3. Каждый из 13 ребят задумал целое число. Оказалось, что сумма задуманных чисел равна 125. После чего каждый изменил свое число: либо разделил его на 3, либо умножил его на 5. Могла ли сумма полученных 13 чисел равняться 175?

Ответ. Не могла.

Решение. Предположим, что сумма могла стать равной 175. Умножим каждое из полученных чисел на 3 (тогда сумма станет равной 525). Это будет равносильно тому, что некоторые задуманные ребятами числа остались без изменений, а некоторые умножились на 15. Если число x умножается на 15, то сумма изменяется на $14x$, то есть на число, кратное 14. Так как часть чисел не менялась, а часть умножалась на 15, то итоговая сумма изменилась на число, кратное 14. Однако изменение суммы, равное $525-125=400$, на 14 не делится. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

В решении предполагается (или неявно используется), что после изменения все числа также целые – не более 2 баллов за задачу.

10.4. Числа x, y, z таковы, что $2x > y^2+z^2$, $2y > x^2+z^2$, $2z > y^2+x^2$. Докажите, что $xyz < 1$.

Первое решение. Из условия следует, что числа x, y, z положительны. Заметим, что $y^2+z^2 \geq 2yz$ (это неравенство равносильно $(y-z)^2 \geq 0$). Отсюда $x > yz$. Аналогично, $y > xz$, $z > yx$. Перемножив неравенства (обе части неравенств положительны), получим $xyz > (xyz)^2$. Отсюда следует требуемое.

Второе решение. Из условия следует, что числа x, y, z положительны. Сложив первое и второе неравенство и преобразовав, получим $2 > (y-1)^2+(x-1)^2+2z^2$. Отсюда $z^2 < 1$, то есть $z < 1$. Аналогично $x < 1$, $y < 1$. Перемножив неравенства, получаем требуемое.

Комментарий. Замечено, что числа x, y, z положительны – 0 баллов.

В решении неявно предполагается, но не упоминается, что числа x, y, z положительны – снять 1 балл.

10.5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность Ω с центром O, при этом BD – диаметр окружности. Лучи AB и DC пересекаются в точке S. Окружность ω, проходящая через точки A, O, C, пересекает отрезок CD в точке M $(M \neq C)$. Докажите, что M – середина отрезка DS.

Решение. Из условия следует, что четырехугольник $AOMC$ – вписанный (см. рис. 3), поэтому $\alpha = \angle OAC = 180° - \angle OMC = \angle OMD$ (смежные углы). Треугольник OAC – равнобедренный, ($OA = OC$ как радиусы). Значит, $\angle OCA = \alpha$. Аналогично, $\angle OCD = \angle ODC = \beta$. Тогда $\angle ACD = \angle ACO + \angle OCD = \alpha + \beta$. Далее $\angle CAS = \angle CAB = \angle CDB = \beta$ (вписанные углы). Угол ACD – внешний для треугольника ACS, поэтому $\alpha + \beta = \angle ACD = \angle CAS + \angle CSA$, т.е. $\alpha + \beta = \beta + \angle CSA$. Итак, $\angle CSA = \alpha = \angle OMD$. Это означает, что $MO \parallel SA$. Но O – середина BD, значит, MO – средняя линия треугольника BSD. Следовательно, точка M – середина SD.

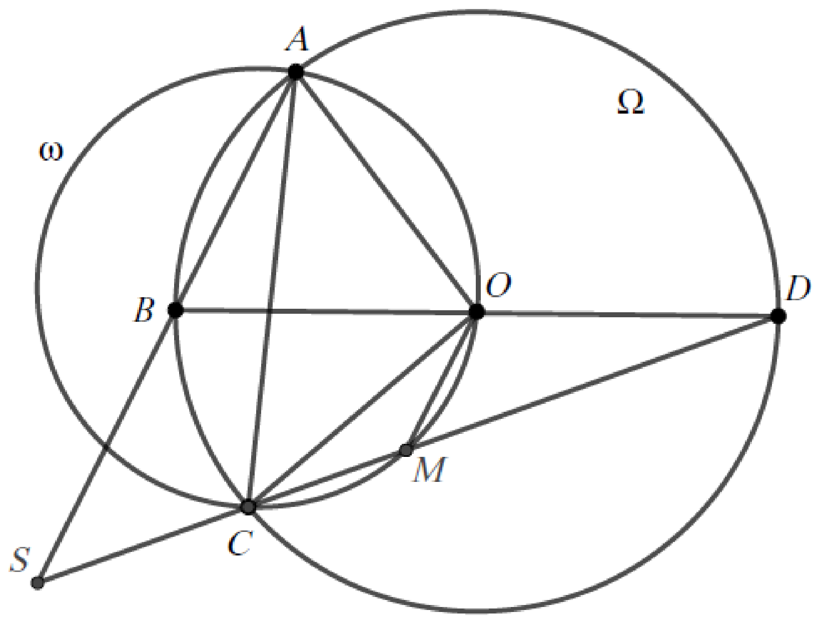

Рис. 3

Комментарий. Доказано, что $\angle OAC = \angle OMD$ – 2 балла.

11 класс

11.1. Даны два пятизначных числа без цифр 0 и 1 в своей записи. Модуль их разности – четырехзначное число *S*. Известно, что если у одного из исходных чисел каждую цифру уменьшить на 1, то модуль разности станет равным 10002. Какие значения может принимать число *S*?

Ответ.1109.

Решение. Пусть A и B – два данных числа, а C – число, полученное из B уменьшением каждой его цифры на 1, то есть $C = B - 11111$. Если $A < C$, то, тем более, $A < B$, поэтому и модули разности – это числа $B - A$ и $C - A$. Однако, по условию, $C - A = 10002 > 10000 > B - A$ (это число – четырехзначное), то есть $C > B$. Противоречие. Значит, $A > C$. Также невозможен случай $A > B$ (тогда $A - C = A - (B - 11111) = (A - B) + 11111 > 10002 = A - C$). Итак, возможен только случай: $C < A < B$. И тогда $A - C = A - (B - 11111) = 10002$, то есть $A - B = -1109$. Отсюда $S = |A - B| = B - A = 1109$.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Верный ответ получен рассмотрением примера –1 балл.
Установлен порядок чисел *A*, *B*, *C* (в обозначениях решения) – 3 балла.
Получено постороннее решение – не более 4 баллов за задачу.

Замечание. Приводить примеры подходящих чисел *A*, *B* не требуется, так как доказано, что возможен лишь один вариант ответа, а из условия следует, что подходящая пара существует. Баллы за отсутствие такого примера не снимаются.

11.2 Разность возрастающей арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, является натуральным числом, оканчивающимся на 2019. Могут ли три последовательных члена этой прогрессии быть квадратами натуральных чисел?

Ответ. Не могут.

Решение. Предположим, что три подряд идущих члена прогрессии являются точными квадратами. Обозначим их $a^2 < b^2 < c^2$. Пусть разность прогрессии равна $d = 2k + 1$. Тогда $c^2 - a^2 = 2d = 4k + 2$. Но $c^2 - a^2 = (c - a)(c + a)$, и оба сомножителя имеют одинаковую четность (отличаются на 2*a*). Значит либо $c^2 - a^2$ – нечетно, либо делится на 4. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Получено равенство вида $c^2 - a^2 = 4k + 2$ – 3 балла.

11.3. На деревянной стене отметили вершины треугольника *ACE*. Перпендикулярно стене вбили гвозди так, что наружу торчат части гвоздей длин: *AB*=1, *CD*=2, *EF*=4 (*B*, *D*, *F* – шляпки гвоздей). Могли ли расстояния между шляпками гвоздей оказаться равными *BD*=$\sqrt{2}$, *DF* =$\sqrt{5}$, *FB* = $\sqrt{13}$?

Ответ. Не могли.

Решение. Предположим, что расстояния между шляпками такие, какие приведены в условии. Из прямоугольной трапеции *ABDC* вычислим длину боковой стороны *AC*: $AC^2 = BD^2 - (CD - AB)^2 = 2 - 1 = 1$, т.е. *AC* = 1. Аналогично найдем *CE* и *EA*: $CE = \sqrt{5-(4-2)^2} = 1$, $EA = \sqrt{13-(4-1)^2} = 2$. Таким образом, *AE* = *AC* + *CE*, откуда следует, что точка *C* лежит на отрезке *AE* (и является его серединой). Последнее означает, что точки *A*, *C* и *E* не могли быть вершинами треугольника. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Вычислены длины отрезков *AC*, *CE* и *EA* – 4 балла.

11.4. Известно, что $x + 0{,}5 > y^2 + z^2$. Докажите, что $x + y + z > -1$.

Решение. Добавим к обеим частям данного неравенства $y + z$. Получим: $x + y + z + 0{,}5 > y^2 + y + z^2 + z = (y + 0{,}5)^2 + (z + 0{,}5)^2 - 0{,}5$. Поэтому $x + y + z > (y + 0{,}5)^2 + (z + 0{,}5)^2 - 1 \geq -1$, что и требовалось.

11.5. В каждой из 320 коробок лежит либо 6, либо 11, либо 15 шариков, причем все три типа коробок присутствуют. Верно ли, что можно выбрать несколько коробок, в которых суммарно ровно 1001 шарик?

Ответ. Верно.

Решение. Заметим, что $6 \cdot 11 \cdot 15 = 990$. Выберем одну коробку с 11 шариками. Покажем, что из оставшихся 319 коробок мы можем выбрать несколько, в которых суммарно ровно 990 шариков. Покажем, что эти 990 шариков можно получить, выбрав коробки одного типа. Действительно, если бы это не получилось сделать, коробок с 6 шариками было бы меньше $990 : 6 = 165$, то есть не больше 164. Аналогично, коробок с 11 шариками – не больше $990 : 11 - 1 = 89$, а коробок с 15 шариками – не больше $990 : 15 - 1 = 65$. То есть коробок было бы не больше, чем $164 + 89 + 65 = 318$, а у нас их 319.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Задача сведена к выбору из 319 коробок нескольких, в которых суммарно ровно 990 шариков – 2 балла.